Seminario Regionale

Capire, Ragionare, Argomentare

5-4-2004

Imperia, Liceo Vieusseux

Competenza razionale e didattica multidisciplinare: Argomentazioni e Dimostrazioni

IRRE Liguria

Progetto di Ricerca-Formazione

Educazione alla Razionalità, Educazione all'Argomentazione, alla Logica

in collaborazione con

Aila

Associazione Italiana di Logica e Applicazioni

Struttura del Progetto

Direzione per la logica e l'area matematico-scientifica: Paolo Gentilini

Direzione per l'area umanistico-letteraria: Giuseppina Manildo

Comitato scientifico: Domenico Arezzo (Università di Genova), Filiberto Arzelà (Presidente IRRE Liguria), Corrado Benassi (Università di Bologna), Alessandro Dal Lago (Università di Genova), Renzo Dameri (Università di Firenze e Direttore IRRE Liguria), Paola Forcheri (Istituto di Matematica Applicata e Tecnologie Informatiche IMATI-CNR di Genova), Maurizio Martelli (Università di Genova), Dario Palladino (Università di Genova), Giuseppe Rosolini (Università di Genova), Silvana Rocca (Università di Genova), Francesco Paolo Siciliano (Preside ITIS "Primo Levi" Genova), Stefano Verdino (Università di Verona).

Gruppo di ricerca: Marcella Bacigalupi (Liceo Scientifico "Colombo", Genova), Francesco Bertolini (Liceo Scientifico "King", Genova), Marina Bertuzzi (IPSIA Meucci, Genova), Marina Caponago (ITIS "Calvino", Genova), Luca Cerretti (Liceo Classico "Costa", La Spezia), Enrica Fenzi (Liceo Scientifico "M. L. King", Genova), Silvano Fuso (ITC "Einaudi", Genova), Renato Galdiero (Liceo Classico "Colombo", Genova), Giuseppina Garzarelli (ITG "Buonarroti", Genova), Claudia Monticelli (Liceo Scientifico "Cassini", Genova), Irene Morelli (IPA "Marsano", Genova), Sonia Pastorino (Liceo Classico "Colombo", Genova), Lorenzo Repetto (ITIS "Calvino", Genova), M. Carmen Rezzano (IPSSCT "Caboto", Chiavari), Gianna Roncallo (Liceo Classico "Colombo", Genova), M. Emanuela Sciutto (IPSSCT "Casaregis", Genova), Federico Siccardi (ITIS "Ferrarsis", Savona), Sara Tamone (ITCG "Abba", Genova), Fabrizio Tampelloni (IPS "Mazzini", Savona), Liliana Tonelli (ITC "Fossati",La Spezia), Marina Vignolo (IPSIA "De Ambrosis",Chiavari) Silvio Zaghi (Liceo Scientifico "Vieusseux", Imperia), Ornella Zavaglia (IPSC "Casaregis", Genova)

Partner: Aila - **Associazione Italiana di Logica e Applicazioni**

Risultati della Ricerca

Un gruppo di ricerca formato da docenti di scuole superiori di ogni ordine ha lavorato, dal 1999 a tutt'oggi, per produrre le basi metodologiche e concreti percorsi multidiscipinari per una educazione alla razionalità.

I risultati metodologici sono sintetizzati in

Protocollo sull' Educazione alla Razionalità nella Scuola Superiore (*I Parte*), a cura del Gruppo di Ricerca IRRE Educazione alla Razionalità, Quaderni di Didattica e Ricerca Formativa, DPS Edizioni, Genova, Settembre 2001

Protocollo sull' Educazione alla Razionalità nella Scuola Superiore II Parte: Curricoli e Saperi, a cura del Gruppo di Ricerca IRRE Educazione alla Razionalità, Quaderni di Didattica e Ricerca Formativa, DPS Edizioni, Genova, Dicembre 2002

Reperibili anche al sito **www.irre.liguria.it**

Definizione della Competenza Razionale come obiettivo formativo [non come dato di fatto]

☛Dimensione dichiarativa della competenza:
Il sapere e il saper fare sono completati da una autoconsapevolezza concettuale,
in seguito alla quale **il soggetto sa giustificare la conoscenza usata** *dichiarando* il sapere soggiacente.
☛ Ciò implica fra l' altro una capacità di *riflessione sui saperi* acquisiti

☛Competenza razionale in una prospettiva di base:

capacità di **concettualizzare e riorganizzare autonomamente il proprio sapere**,
avendo **consapevolezza dichiarativa dei ragionamenti usati**,
e la **competenza linguistica** adeguata ad esprimerli.

☛ Competenza razionale in una prospettiva evoluta:

capacità di **ragionare sul proprio linguaggio, sulle proprie conoscenze**, sulle teorie che vengono proposte negli specifici insegnamenti,
usando in ciò gli **strumenti concettuali essenziali messi a disposizione dalla cultura moderna**,
e
capacità di **raggiungere conclusioni diverse ed eventualmente opposte al senso comune**,
quando siano **sostenute da inferenze corrette**.

Alcune competenze trasversali connesse alla Competenza Razionale

- *competenza d'uso della lingua italiana*: formulare, scrivere, e capire discorsi a struttura logica e sintattica complessa;

-***competenza argomentativa*****:** formulare ragionamenti in linguaggio naturale, collegando fatti e nozioni in un modo che risulti chiaro, coeso, coerente e convincente

-*competenza logico-dimostrativa*: stabilire un collegamento fra alcune assunzioni e una tesi tramite inferenze logicamente corrette, almeno nell' ambito della logica classica;

Centralità del linguaggio verbale**:**
<<senza una padronanza del linguaggio verbale, scritto e orale, adeguata alla giustificazione delle prestazioni attese di una competenza, non si dà né competenza dichiarativa né competenza razionale>> (Protocollo II).

La Competenza Razionale come gestione di una razionalità molteplice

E' necessario distinguere diversi aspetti della razionalità esistenti nella società e nella cultura:

- la razionalità di senso comune di tipo innato: è quella messa a fuoco dalla psicologia sperimentale: eredità quasi biologica della specie umana, e, in linea di principio è inconsciamente presente in ogni soggetto, **prescinde dal livello culturale**

- la razionalità comune di tipo culturale:
- ha senso attribuirla solo a soggetti alfabetizzati
-discrimina fra comportamenti/argomenti ritenuti ragionevoli **per evidenza** e quelli che non lo sono;
- determina la categoria dell' ovvio per il cittadino medio;
- si evolve storicamente, e forse cambia velocemente.
Non è di facile delimitazione

- la razionalità evoluta di tipo scientifico e culturale: è quella individuata dal pensiero e dalla scienza canonicamente stabiliti dalla nostra civiltà:
può a sua volta distinguersi in **razionalià classica** e **razionalità moderna**

Aspetti della razionalità di senso comune ed esempi di conflitto con la razionalità evoluta

Esempio 1

La retta e il piano euclidei contengono infiniti punti. Ci sono più punti sul piano o sulla retta?

Il senso comune innato, e anche quello culturale, rispondono senz'altro che il piano contiene più punti della retta.

La teoria degli insiemi di Cantor prova (fine 800) che i due insiemi si possono mettere in corrispondenza biunivoca e qunidi contengono lo stesso numero cardinale infinito di punti.

Ma il senso comune innato ha delle ragioni pratiche inconfutabili nella vita quotidiana: se ci chiedono se si mangia di più con uno spaghetto o con una foglia rettangolare di pasta sappiamo senz'altro cosa rispondere

Del resto si noti che la retta e il piano euclidei sono nozioni evolute e, nella loro corretta definizione, controintuitive

Esempio 2

Enunciato di senso comune:

"esistono un alto e un basso: esiste cioè un orientamento assoluto delo spazio"

Fisica : "non esistono un alto e un basso assoluti"

<u>Competenza razionale in una prospettiva di base: riformulazione</u>

Capacità di **concettualizzare e riorganizzare autonomamente il proprio sapere**,
avendo **consapevolezza dichiarativa dei ragionamenti usati**,
e la **competenza linguistica** adeguata ad esprimerli.

padroneggiando in ciò gli **strumenti essenziali messi a disposizione dalla Logica**

Inoltre:

Avere consapevolezza della molteplicità delle razionalità attive nella cultura di oggi, e sapere individuare quella necessaria, a seconda del contesto, pratico o teorico-disciplinare

Perché l'Argomentazione ?

L' Argomentazione (e quindi produzione di testi argomentativi, o discussione *ragionevole* con altri soggetti,…)

si presenta come la via più completa per l'educazione alla competenza razionale di base,

perché ne riflette la sostanziale interdisciplinarietà (e impone il superamento delle demarcazioni fittizie fra saperi)

perché sovente impone il controllo di razionalità diverse

perché include una tappa di educazione alla Logica

e solo a posteriori di tale tappa
ha senso proporre al discente situazioni dialettiche (epistemologicamente) accettabili ma indipendenti dalla logica

Ragione di attualità: educazione all’Argomentazione come Educazione Civica

I giovani sono sottoposti costantemente a discorsi a fine persuasivo di forma *a-razionale*,
caratterizzati dalla *truffa sentimentale* :

a partire da premesse particolari di cui si enfatizza l’aspetto emotivo, vengono imposte conclusioni generali che non hanno alcun legame giustificabile con le premesse.

Occorre educare a al fatto che
i sentimenti (per altro così ricchi di meriti in altri campi) non sono argomenti, e a colpi di sentimenti si può provare qualunque cosa, compreso il caos

<< *va dove ti porta il cuore* >> è una massima che, assolutizzata, coincide con l’istigazione al crimine (o all’irresponsabilità)

Ma cosa è una *buona argomentazione* nella nostra ottica educativa ?

Considerando la teoria dell'argomentazione nella sua globalità, dalla retorica classica alle riflessioni contemporanee, si nota una apparente duplicità:

a)*Una buona argomentazione è quella che sostiene un tesi in modo logicamente corretto e possibilmente persuasivo per l'uditorio* **Quindi:**
le fallacie logiche sono da evitare;
[classicamente, fallacia è argomento logicamente scorretto che è psicologicamente persuasivo]

b) *Una buona argomentazione è quella in cui il soggetto argomentante sostiene una tesi*
tenendo conto della logica,
avendo definito in sé una immagine adeguata dell'uditorio *(o insieme dei destinatari, reale o ideale)* *che consenta al suo discorso di essere persuasivo,*
e impiegando delle corrette procedure pragmatiche di comporatamento comunicativo e dialogico: accordi preventivi sulle premesse condivise, rispetto di protocolli di discussione , ecc… **Quindi**

Il fine è la persuasione, ossia l'assenso dell'intelocutore, rispettando una fase di accordi preventivi su dati condivisi e sulle procedure pragmatiche del discutere; la logica non costituisce un vincolo

Tipi di argomentazione per una metodologia didattica

Le due definizioni precedenti non sono incompatibili in modo sostanziale: sono riferibili a un soggetto colto che, avendo esperito la fase a) [il soggetto conosce la logica classica] si rende conto delle problematiche epistemologiche a cui risponde la fase b) [ogni argomentazione deve considerare lo stato cognitivo dei destinatari]

Il discente può produrre:

1)**Argomentazioni libere**: si tiene conto della logica, ma si ammette che valutazioni in merito alla persuasione verso i destinatari prevalgano sui vincoli logici [supponendo che tali valutazioni siano ben giustificabili dal soggetto argomentante al livello meta del discorso], e che parti rilevanti del discorso siano sostenute da risorse espressive della lingua indipendenti dalla logica

2)Argomentazioni che rispettano lo stile della **Dimostrazione**:
i mezzi espressivi scelti devono essere i più adatti in funzione dei destinatari e del contesto disciplinare, ma le inferenze proposte sono valide secondo la logica classica; in particolare non si ammettono fallacie formali

Anche se può apparire più formativo il secondo tipo, non è accettabile limitarsi ad esso: **ai fini della formazione a una razionalità evoluta, fra i due tipi esiste continuità**.

ESEMPIO [da Shakespeare, Giulio Cesare, atto III]

Antonio: Amici,concittadini, romani ! prestatemi orecchio. Sono venuto a seppellire Cesare, non a farne l'elogio. Il male che l'uomo fa, gli sopravvive, il bene, spesso, resta sepolto con le sue ossa. E così sia di Cesare. Il nobile Bruto vi ha detto che Cesare era ambizioso: se era, ebbe grave colpa; e Cesare l'ha gravemente scontata.
Qui, col beneplacito di Bruto e degli altri - chè Bruto era uomo d'onore e anche gli altri tutti uomini d'onore- sono venuto a parlare al funerale di Cesare. Fu mio amico, leale e giusto con me. Ma Bruto dice che era ambizioso: e Bruto è uomo d'onore. Egli portò un gran numero di prigionieri in patria, a Roma, che riempirono col prezzo del riscatto le casse dell'erario, fu questa, forse, in Cesare, ambizione ? Quando vedeva piangere un pezzente cesare lacrimava: sembrerebbe, l'ambizione, di ben più dura scorza. Ma Bruto dice - e Bruto è uomo d'onore- che era ambizioso. Tutti vedeste come per i lupercali tre volte io gli offersi la corona di re ed egli tre volte la respinse: è ambizione questa? Eppure Bruto dice che Cesare era ambizioso, e Bruto è, lo sappiamo, un uomo d'onore.
Non parlo io già per contestare quello che Bruto ha detto; sono qui soltanto per dire quello che so. Tutti l'amaste un tempo; e non senza motivo. Quale motivo vi impedisce oggi di piangerlo ? O senno, tu sei fuggito fra le bestie brute, e gli uomini hanno perduto il ben dell'intelletto…..

Esempio: prime osservazioni

Il nocciolo dell'argomentazione di Antonio (che vuole confutare la precedente tesi di Bruto secondo cui *Cesare era ambizioso* e provare che *Bruto non è un uomo d'onore*) contiene palesi fallacie formali. Antonio assume implicitamente questi assiomi:

essere non ambizioso $\rightarrow$ *riempire le casse dell'erario*

essere non ambizioso $\rightarrow$ *lacrimare insieme ai pezzenti*

essere non ambizioso $\rightarrow$ *rifiutare la corona ai lupercali*

e compie tre volte una fallacia logica detta (impropriamente) "affermazione del conseguente" **proponendo ai destinatari inferenze come questa:**

essere non ambizioso $\rightarrow$ *riempire le casse dell'erario*

Cesare riempie le casse dell'erario
Cesare non è ambizioso

che è **logicamente errata,** analoga a << Ogni uomo ha due gambe. Le anatre hanno due gambe. Le anatre sono uomini>>

D'altra parte, data la situazione, i destinatari, e il contesto sia pragmatico sia teorico del discorso (è un discorso politico) non si può negare la sua solidità retorico-argomentativa: **è persuasivo,** e anzi, per l'uditorio, oggettivamente convincente (appello ai dati, appello alla ragione !!!!) e, **attenzione, non fa appello solo ai sentimenti, il suo centro è provare la tesi <<*Cesare non era ambizioso*>>, anche se la prova è fasulla, all'interno di una dimostrazione per assurdo della tesi <<** *Bruto non è un uomo d'onore*>>

Nell’ambito di una educazione alla razionalità, dobbiamo considerare l’argomentazione di Antonio come irrazionale?

No, sarebbe un’analisi incompleta. Se vediamo l’argomentazione anche in quanto dialogo con dei destinatari (reali o ideali) dei quali il soggetto argomentante deve formulare in sé una esatta definizione, possiamo dire che:

*Antonio è un soggetto razionale evoluto;
*egli conosce la logica classica;
*egli valuta e definisce in sé la razionalità di senso comune non educato dei suoi destinatari (la folla) e argomenta usando inferenze di senso comune, che violano la logica, ma che sono in accordo alla razionalità dei destinatari, **sapendo di farlo.**

Quindi: l’argomentazione è razionale, in quanto consapevolmente riferita alla razionalità di senso comune degli interlocutori

Certamente, nella nostra ottica, gli interlocutori *sono privi* di competenza razionale

(l’auspicio è che i nostri studenti a fine percorso non siano al livello della folla a cui parla Antonio)

Antonio padroneggia la Logica perché è questo che gli consente di mantenersi perfettamente coerente con la razionalità degli interlocutori e di impostare una dimostrazione per assurdo dell’inattendibilità di Bruto

Proposta di metodo:

E' ammissibile che il discente usi delle fallacie logiche nell'**Argomentazione libera** se:

i) è consapevole che lo sono

ii) sa giustificarle in quanto riferite alla specifica razionalità dei destinatari, o, più debolmente, sa giustificarle in quanto persuasive all'interno del contesto del discorso

Logica e Argomentazione

Non abbiamo ancora detto come la Logica, in quanto Logica Classica nell'accezione moderna (canonizzata negli anni 20 del Novecento) contribuisca a illuminare il problema della validità delle Argomentazioni, e a selezionare fra esse quelle che sono anche Dimostrazioni

Logica e linguaggio naturale

In una argomentazione in linguaggio naturale esiste spesso una non riducibile ambiguità - ricchezza del linguaggio naturale- che dà luogo a passaggi logicamente problematici che anticamente erano visti come fallacie. Semplicemente, essi non sono inferenze o non possiedono alcuno statuto logico, pur esercitando una funzione rilevante all'interno di un Argomentazione libera. Diversamente, in una dimostrazione le ambiguità devono essere sempre eliminabili. **Esempio**:

Molti enunciati del linguaggio naturale possono essere sia veri che falsi rispetto al senso comune:

tutti gli studenti sono idealisti
tutti gli idealisti sono genitori
tutti gli studenti sono genitori

è un sillogismo a struttura corretta, in cui tutte le proposizioni sono ambigue:
per la vastità delle connotazioni del termine "*idealista*" (dipendenti anche dalla cultura sociale del momento)
per la effettiva ambiguità del termine "*studente*"
("colui che studia una qualunque cosa in qualunque modo" oppure "status di una persona giovane la cui attività principale è lo studio"…) per il possibile **uso metaforico** del termine "*genitore*"

Rapporto fra proposizioni e verità nella Logica moderna

Una delle conquiste specifiche della logica moderna è il fatto che la nozione di **verità** per un enunciato del linguaggio deve confrontarsi con una infinità di interpretazioni possibili

Un enunciato può essere *vero* rispetto a una interpretazione, *falso* rispetto a un altra; un enunciato è *valido* quando è vero rispetto a tutte le interpretazioni possibili

Per il **linguaggio simbolico** le interpretazioni sono formalmente definibili, e risulta evidente che possono essere infinite;
per l' argomentazione in linguaggio naturale si può introdurre il concetto euristico di **mondo possibile** come corrispondente di una interpretazione formale:

un *mondo possibile* che interpreta un enunciato B è uno stato di cose alternativo rispetto al mondo reale di riferimento, ma dotato di una coerenza fattuale intrinseca, e nel quale sono presenti oggetti e situazioni che corrispondono ai termini e ai predicati che compaiono in B
l'enunciato:

nel 1989 è caduto il muro di Berlino

è vero nel mondo reale, ma è possibile immaginare un mondo alternativo fattualmente coerente in cui esso è falso

Interpretazione di enunciati nei mondi possibili
Esemplificazioni di questa possibilità, oggi canonizzata dalla semantica formale, ci vengono dall' arte.

L' enunciato

"*alcuni commessi viaggiatori si trasformano in insetti*"

è falso nel mondo standard, ma risulta vero nel mondo delineato nel racconto "La metamorfosi " di Kafka.

Questo 'mondo di Kafka' è un mondo alternativo a quello standard ma con un suo criterio di verità: non è vero che qualunque fatto arbitrario vi può accadere, e possiamo pensarlo come modello di una descrizione sintattica fatta di proposizioni fra loro consistenti.

Quindi: la nozione di verità di una proposizione, in Logica, non privilegia necessariamente una sola realtà (mondo) standard rispetto a cui le proposizioni della sintassi acquistino significato

Si ammette una pluralità di universi semantici

Conseguenza Logica

La nozione che definisce la validità logica della relazione che si stabilisce fra le premesse e la conclusione di una Argomentazione è la ***Conseguenza Logica***

Diciamo che una argomentazione, che lega alcune premesse a una conclusione tramite una successione di proposizioni intermedie, è *valida*, e che *la conclusione è conseguenza logica delle premesse*,
se non è possibile che le premesse siano vere e la conclusione non sia vera

Però questa definizione non è chiara se fa appello a una nozione intuitiva di verità. E' meglio renderla più esplicita

Anticipiamo che solo la disponibilità di un linguaggio artificiale, come quello della logica dei predicati, ha reso possibile definire la nozione. Quindi, più formalmente:

la proposizione A è ***conseguenza logica*** *di un insieme di proposizioni* $B_1,\dots,B_n$ *se e solo se A è vera* ***in ogni possibile interpretazione del linguaggio*** *che rende simultaneamente vere le proposizioni* $B_1,\dots,B_n$

Conseguenza Logica , definizione euristica

<u>Euristicamente, per argomenti in linguaggio naturale:</u>

La proposizione A è conseguenza logica delle ipotesi $B_1,\ldots,B_n$ *(o, analogamente, le ipotesi* $B_1,\ldots,B_n$ *implicano logicamente A)* ***quando in ogni mondo possibile [o in ogni circostanza possibile]*** *in cui le ipotesi* $B_1,\ldots,B_n$ *risultano vere, anche la conclusione A risulta vera.*

Tuttavia, non è affatto facile affermare che una argomentazione è valida **applicando direttamente la nozione di conseguenza logica** perché quest'ultima è, a ben guardare, <u>una condizione infinitaria</u>: devo considerare le infinite situazioni possibili (contesti possibili, circostanze possibili, mondi possibili…) in cui le premesse $B_1,\ldots,B_n$ possono essere vere.

Per questa ragione le Dimostrazioni fanno largo uso di regole di inferenza sintatticamente definite, per le quali vale questo teorema:

Ogni Argomentazione costituita da applicazioni di regole di inferenza della Logica (dei predicati) Classica stabilisce una relazione di conseguenza logica fra le premesse e la conclusione

Conseguenza Logica e verità delle premesse e della conclusione

Nel seguente argomento la conclusione è conseguenza logica delle premesse:

tutti i mammiferi hanno i polmoni
tutte le balene sono mammiferi
quindi, tutte le balene hanno i polmoni

e, inoltre, rileviamo che le tre proposizioni sono vere rispetto al mondo standard;
osserviamo che la verità delle premesse impone la verità della conclusione

Tuttavia, anche in questo argomento la conclusione è conseguenza logica delle premesse:

tutte le creature con dieci zampe hanno le ali
tutti i ragni hanno dieci zampe
quindi, tutti ragni hanno le ali

ma osserviamo che tutte le proposizioni che lo compongono sono false rispetto al mondo standard.

Argomenti non validi

Diamo ragione del perchè l'argomento:

se possedessi tutto l' oro di fort Knox sarei ricco
non possiedo tutto l' oro di fort Knox
quindi, io non sono ricco

non stabilisce una relazione di Conseguenza Logica:

infatti
posso immaginare un mondo possibile in cui le premesse sono vere e io non sono ricco,
ma anche un mondo possibile in cui le premesse sono vere e io sono ricco, (ad es perchè ho ereditato un miliardo di dollari).

In generale, quando diamo il nostro consapevole assenso a una dimostrazione matematica o filosofica svolta in linguaggio naturale, riconosciamo (implicitamente) che essa stabilisce una relazione di Conseguenza Logica.

Dimostrazioni

Una Dimostrazione (rilevante) è una Argomentazione tale che:

i) Si possono individuare senza ambiguità gli **assiomi** (ipotesi, premesse), gli **schemi di inferenza** usati, la **conclusione**

ii) Il discorso dimostrativo si può tradurre interamente nel Linguaggio Artificiale Simbolico della Logica dei Predicati (vedi Appendice): quindi, **il linguaggio naturale è usato in modo da non generare alcuna ambiguità**

iii) **L'insieme degli assiomi è non contraddittorio**

iv) In linea di principio, tutte le inferenze usate **sono riconducibili a un qualche sistema canonico di regole per la Logica dei Predicati Classica** (vedi Appendice)

si può provare che:
in una Dimostrazione, fra le ipotesi e la tesi esiste, in modo inequivocabile, una relazione di conseguenza logica

Irrilevanza delle ipotesi contradditorie nella Logica Classica e nozione sintattica di insieme di proposizioni consistente

Nell'ambito della Logica Classica da ipotesi contradditorie, ossia a partire da *contraddizioni* della forma:

$$A \wedge \neg A$$

(Es *Io ho 10 euro e io non ho 10 euro*
è una contraddizione nel linguaggio della lingua italiana)
si può dimostrare qualunque proposizione. Quindi una argomentazione che ha assiomi contradditori è sempre valida ma è irrilevante

Diciamo che un insieme di proposizioni è *inconsistente* (contradditorio, incoerente..) se, usando alcune sue proposizioni come premesse di inferenze che impiegano le regole della logica classica,
è possibile ottenere una contraddizione come conclusione.
Se ciò non è possibile diciamo che l'insieme è *consistente* (non contradditorio, coerente,…)

Osserviamo che abbiamo definito queste nozioni senza alcuna considerazione di significato o verità; **sono nozioni puramente sintattiche**.

Dimostrazioni, Assiomi e Teorie

La *dimostrazione* era anticamente definita come un'inferenza le cui premesse, dette *assiomi*, fossero **vere per evidenza.**

A partire dalla fine dell'ottocento si constatò che la nozione di **verità evidente** è talmente problematica che non la si può usare per stabilire criteri accettabili.

Quindi, si è definita la *dimostrazione formale* come un' inferenza, in cui si applicano le regole della logica classica, e le cui premesse, dette *assiomi*, **sono un insieme di proposizioni non contradditorio**

Questo riflette il fatto che le dimostrazioni in generale sono svolte in un ambito disciplinare (matematica,… ecc) ossia all'interno di teorie (ad es aritmetica, geometria euclidea,…) e che gli assiomi della dimostrazione appartengono all'insieme degli assiomi della teoria.

Modernamente, **si chiede che gli assiomi di una teoria siano un insieme consistente, e per il resto possono avere forma arbitraria**

Teorie e assiomi : esempi

I seguenti sono un insieme di assiomi per la Geometria Euclidea piana:

1)Da ogni punto è possibile condurre una linea retta ad ogni altro punto;
2)*Un segmento di linea retta può essere indefinitamente prolungato in linea retta*;
3)*Attorno ad un centro scelto a piacere con un raggio scelto a piacere è possibile tracciare una circonferenza;*
4)*Tutti gli angoli retti sono tra loro uguali*;
5) *Dati una retta e un punto ad essa esterno, esiste una e una sola parallela per il punto dato alla retta data.*

Da essi, tramite le regole di inferenza della logica classica, e gli assiomi e le regole per la relazione di uguaglianza, è possibile dimostrare tutti i teoremi della geometria euclidea piana.

La debolezza della nozione di "verità evidente" è mostrata dal fatto che **la teoria costituita dagli assiomi 1),2),3),4) più il seguente <u>Assioma di Lobacevskij:</u>**

(IV.1)*Dati in un piano una retta e un punto esterno, per il punto passano almeno due rette distinte che non incontrano la retta data*

è anch'essa una teoria consistente, la *geometria iperbolica*, anche se l'assioma di Lobacevskij è la negazione del 5) di Euclide

Le dimostrazioni matematiche reali

Attenzione: le dimostrazioni matematiche reali non sono mai dimostrazioni del tutto formali, in cui si applicano solo le regole di inferenza della logica classica:
in realtà sono testi complessi in linguaggio naturale, in cui, accanto ad applicazioni delle regole di inferenza classiche, si usano tutte le risorse espressive del linguaggio naturale,
tutte le risorse di una moderna retorica,
per richiamare, tenendo conto degli specifici lettori/ascoltatori, l'immensa conoscenza di sfondo necessaria che può essere solo evocata e non detta
(una dimostrazione matematica anche banale, che enunciasse esplicitamente tutte le sua premesse avrebbe lunghezza inammissibile)
e in cui considerazioni sulla verità si mescolano all'applicazione di regole sintattiche.

Quello che è importante sapere è che una dimostrazione matematica corretta **è, in linea di principio, sempre riconducibile a una dimostrazione formale** in cui compaiano solo:
gli assiomi della teoria (o delle teorie, ad esempio: geometria euclidea, aritmetica, algebra dei polinomi, ecc) in cui si opera,
e le regole di inferenza della logica classica

Esempio

Tesi: *I numeri naturali dispari costituiscono un insieme infinito*

Dimostrazione:

Supponiamo per assurdo che i numeri naturali dispari siano in numero finito, e che costituiscano l' insieme finito D;

è immediato osservare che ogni insieme finito di numeri naturali contiene un numero maggiore o uguale a tutti gli altri, che possiamo definire il *massimo* dell' insieme; conveniamo di indicare con k il massimo di D.

Poichè k è dispari, allora il numero k+2 è dispari, ma non appartiena a D; ciò è assurdo, per definizione di D.

Allora, applicando delle inferenze logicamente corrette all' ipotesi "*i numeri naturali dispari sono in numero finito*" abbiamo ottenuto conclusioni contradditorie, ossia proposizioni della forma "*D è l'insieme di tutti i dispari, e k+2 è dispari, e k+2 non appartiene a D*";

ma inferenze corrette non possono condurre da ipotesi vere a conclusioni false.

Quindi, l' ipotesi "*i numeri naturali dispari sono in numero finito*" non può essere vera;

allora, *per il principio del terzo escluso*, è vera la sua negazione, che coincide con la tesi.

Fallacie di cui il discente deve essere consapevole

Possiamo ritenere che produrre inconsapevolmente, in un testo argomentativo meditato, le seguenti fallacie formali, non sia ammissibile per un soggetto dotato di una competenza razionale di base:

1)la così detta affermazione del Conseguente:
<<se P allora Q; vale Q; allora si inferisce che vale P>> ad es

se piove allora fa freddo
fa freddo
piove

essa storpia la regola valida del **modus ponens**:
<< se P allora Q; vale P; allora si inferisce che vale Q>>

2) La così detta negazione dell'Antecedente:
<<se P allora Q; vale non-P; allora si inferisce che vale non-Q>> ad es

se Fabio è genovese allora Fabio è ligure
Fabio non è genovese
Fabio non è ligure

essa storpia la regola valida del **modus tollens**:
<<se P allora Q; vale non-Q; allora si inferisce che vale non-P>>

Fallacie formali di cui il discente deve essere consapevole

3) La petizione di principio, ossia, assumere la conclusione da provare come premessa. Es: *Dio esiste; infatti, lo dice la Bibbia che, come sappiamo , è la parola di Dio.*
Oppure, non capire la differenza fra ipotesi e tesi in una Dimostrazione

4) Errori nell'applicazione dei connettivi proposizionali a enunciati quantificati universalmente o esistenzialmente (vedi Appendice). La negazione di *tutti i corvi sono neri* **non è** *nessun corvo è nero*
e
la negazione di *esiste almeno un uomo scapolo* **non è** *esiste un uomo sposato*, e così via

ESEMPIO

analisi di argomentazioni in linguaggio naturale dal punto di vista della logica classica moderna

<< Se gli uomini sono buoni le leggi non sono necessarie per impedire che agiscano male, mentre se gli uomini sono cattivi le leggi non riusciranno a impedire che essi agiscano male. Gli uomini sono o buoni o cattivi. Quindi le leggi non sono necessarie o sono inutili >>

L' argomento sottintende che: "cattivo" equivale a "non-buono"

Una parziale ascesi sintattica lo trasforma così:

ipotesi

uomini buoni → leggi non necessarie

uomini non-buoni → leggi inutili

assioma logico

(uomini buoni) o (uomini non-buoni)

(leggi non necessarie) o (leggi inutili)

<u>critica sintattica:</u>

l' argomentazione è corretta dal punto di vista della deduzione classica

infatti dalle ipotesi si deduce:

(uomini buoni) o (uomini non-buoni) → (leggi non necessarie) o (leggi inutili)

da cui applicando la regola del modus ponens con l'assioma logico (terzo escluso) *(uomini buoni) o (uomini non-buoni)* si ha la tesi

ESEMPIO : analisi di argomentazioni

<< Se gli uomini sono buoni le leggi non sono necessarie per impedire che agiscano male, mentre se gli uomini sono cattivi le leggi non riusciranno a impedire che essi agiscano male. Gli uomini sono o buoni o cattivi. Quindi le leggi non sono necessarie o sono inutili >>

Quindi la conclusione si deduce tramite la logica classica dalle ipotesi.
Tuttavia, l' argomento si presta a una <u>critica semantica</u>:

possiamo legittimamente sostenere che l' ipotesi

uomini non-buoni $\rightarrow$ *leggi inutili*

sia falsa in tutti i mondi possibili, oppure che non esistano mondi possibili in cui le due ipotesi siano simultaneamente vere. In tal modo la congiunzione delle ipotesi è falsa in tutti i mondi possibili e quindi è equivalente a una contraddizione. <u>Ma allora l' argomentazione è irrilevante</u>, **perchè da ipotesi contradditorie si può provare qualsiasi enunciato**

APPENDICE

Logica dei Predicati Classica: il Linguaggio Artificiale Simbolico e schemi di Regole di Inferenza

Isolare la struttura logica del linguaggio naturale:

Per poter stabilire la validità logica di una argomentazione-dimostrazione espressa in linguaggio naturale è utile

selezionare una plausibile struttura logica del discorso naturale, eventualmente lasciando perdere altri aspetti

A causa delle vastissime risorse espressive del linguaggio naturale, questa operazione avrà necessariamente l'aspetto di uno sfrondamento, di una riduzione all'essenziale, di una riformulazione che acquista univocità ma che perde sfumature

questa operazione, detta *ascesa sintattica*, arriva alla costruzione di un linguaggio artificiale, *il linguaggio della logica dei predicati.*

Si tratta di una conquista matura del pensiero scientifico e filosofico e scientifico: infatti, anche se le basi dell'analisi logica dell'argomentazione sono date da Aristotele il linguaggio artificiale è un prodotto del tutto moderno (inizio ventesimo secolo)

La forma logica del discorso: i connettivi proposizionali

Prospettiva proposizionale
A una prima analisi del linguaggio naturale notiamo la presenza di connettivi che hanno la funzione di combinare proposizioni semplici contribuendo al valore di verità della proposizione composta:

"*se carlo è ligure allora è gentile*"

"*oggi c'è il sole oppure il 7 marzo 1999 piove*"

"*Carlo è piemontese e non è nato a Torino*"

possiamo vederle come:

se (Carlo è ligure) **allora** (Carlo è gentile)

(oggi c'è il sole) **oppure** (il 7 marzo 1999 piove)

(Carlo è piemontese) **e** [**non** (Carlo è nato a Torino)]

con un procedimento di formalizzazione parziale, possiamo pensare che le precedenti proposizioni composte siano state ottenute da schemi in cui occorrono variabili proposizionali A,B,C,...:

se A allora B $\qquad$ F oppure D $\qquad$ C e (non G)

Connettivi logici: *Prospettiva proposizionale*

Assumiamo che i termini naturali "**se ...allora** ...", "**oppure**" , "**e**" , "**non**" (e i loro sinonimi: ad es "implica", "o"...) abbiano un ruolo centrale nella combinazione logica delle proposizioni e associamo ad essi i simboli

$\neg$ (non) $\wedge$ (e) $\rightarrow$ (se…allora) $\vee$(o,oppure)

(detti **connettivi proposizionali**)

e le espressioni simboliche corrispondenti sono:

$A \rightarrow B$ $\quad F \vee D$ $\quad C \wedge (\neg G)$

dove *A,B,F,D,C,G,....* fanno parte del linguaggio della *logica proposizionale*

Abbiamo ottenuto uno strumento già estremamente efficace per rappresentare inferenze fra proposizioni: ad esempio, le seguenti sono inferenze proposizionali valide :

$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow C \\ B \rightarrow C \end{array}}{A \vee B \rightarrow C} \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ \neg B \end{array}}{\neg A}$$

I quantificatori dal punto di vista del linguaggio naturale

La traduzione in logica proposizionale delle argomentazioni naturali è efficace quando le proposizioni considerate hanno una struttura molto semplice; altrimenti la perdita di informazione è eccessiva

Es

" **se** tutti i gatti sono quadrupedi **e** alcuni gatti sono grigi, **allora** alcuni quadrupedi sono grigi"

sarebbe: $(\mathbf{C} \wedge \mathbf{D}) \rightarrow \mathbf{R}$

dove:

si sono persi gli operatori: "*tutti i*" "*alcuni*"
essenziali in questa argomentazione;
si sono perse queste proprietà:

"essere un gatto" "essere quadrupede"
"essere grigio"

anch'esse importanti nell' argomentazione;

E' necessario:
un simbolismo che rappresenti **proprietà e relazioni**
e
dei connettivi che rappresentino le **indicazioni sulla quantità di individui coinvolti** dalle relazioni e proposizioni, ossia *esiste almeno un* , *alcuni*, *per ogni*, *tutti*, e così via

I quantificatori e le variabili individuali

Consideriamo questi esempi:

tutti gli uomini sono mortali

esiste un lago salato

ogni studente frequenta almeno un corso universitario

se vogliamo metterne in luce la struttura logica **dobbiamo accettare il fatto che tali proposizioni si riferiscono a un numero indefinito e talvolta potenzialmente infinito di individui**, e quindi ricorrere all'introduzione di ***variabili*** nel linguaggio formale che vogliamo costruire, ossia operare questa prima traduzione:

per ogni x, se x è un uomo allora x è mortale

esiste y tale che y è un lago e y è salato

per ogni x, se x è uno studente, allora esiste y tale che y è un corso universitario e x frequenta y

questa prima traduzione mette in evidenza due nuovi connettivi, o operatori, che agiscono su una proposizione con l'ausilio di un avariabile:

"**per ogni**" ed "**esiste almeno un**" sono detti *quantificatore universale* e *quantificatore esistenziale*, e nel linguaggio della logica dei predicati sono rispettivamente i simboli $\forall$ ed $\exists$

Ma allora, usando i connettivi logici proposizionali già noti, le proposizioni:

tutti gli uomini sono mortali

esiste un lago salato

ogni studente frequenta almeno un corso universitario

possono essere così riformulate nella loro struttura logica, limitandoci all'espressione simbolica dei connettivi e non ancora delle realzioni fra individui e proprietà di individui:

$\forall$x[(x è un uomo) $\rightarrow$ (x è mortale)]

$\exists$y[(y è un lago) $\wedge$ (y è salato)]

$\forall$x[(x è uno studente) $\rightarrow$ $\exists$z((z è un corso universitario) $\wedge$ (x frequenta z)]

Proprietà dei quantificatori rispetto alla negazione, alla congiunzione, alla disgiunzione

La fatica formale che abbiamo fatto ci consente di discutere in modo chiaro la correttezza di alcune implicazioni ed equivalenze logiche che coinvolgono i quantificatori, e che sono frequenti nel discorso comune e scientifico

* Ad esempio quale è la negazione di :

Tutte le donne sono bionde ?

*E' corretto dire:
se vale *esiste un animale con quattro gambe* e se vale *esiste un animale che vola* allora vale *esiste un animale con quattro gambe* e *che vola* ?

*E corretto dire:
se vale *ogni persona è un maschio oppure una femmina* allora vale *ogni persona è un maschio oppure ogni persona è una femmina* ?

Proprietà dei quantificatori rispetto alla negazione

La negazione di
$\forall x$((x è una donna) $\rightarrow$ (x è bionda))

non è *nessuna donna è bionda*

fallacia frequente fra gli studenti, ma
esiste almeno una donna che non è bionda ossia

$\exists y$((y è una donna) $\wedge$ ($\neg$(y è bionda)))

quindi la **negazione** di
per ogni x vale B **è**
esiste almeno un y tale che non vale B

D'altro lato la **negazione** di :
esiste almeno un x tale che vale B **è**
per ogni y non vale B

questo ci suggerisce che i quantificatori sono legati da queste equivalenze:

per ogni x vale B
è logicamente equivalente a
non esiste y tale che non vale B

e

esiste almeno un x tale che vale B
è logicamente equivalente a
non per ogni y non vale B

Proprietà dei quantificatori rispetto alla congiunzione

Per il quantificatore esistenziale :

esiste x tale che valgono A e B **implica logicamente che** *esiste x tale che vale A e esiste y tale che vale B*

<u>ma non vale in generale il viceversa</u>
Quindi
esiste un animale con quattro gambe e *esiste un animale che vola* **non implica logicamente che** *esiste un animale con quattro gambe e che vola*

Per il quantificatore universale:

per ogni x valgono A e B **è logicamente equivalente a** *per ogni x vale A e per ogni y vale B*

Quindi:
ogni alunno di quinta è promosso e ogni alunno di quinta è disubbidiente a casa **è logicamente equivalente a** *ogni alunno di quinta è promosso ed è disubbidiente a casa*

Proprietà dei quantificatori rispetto alla disgiunzione

Per il quantificatore esistenziale :

esiste x tale che valgono A o B **equivale logicamente a** *esiste x tale che vale A o esiste y tale che vale B*

esiste un alunno di quinta che è studioso o ubbidiente **equivale logicamente a** *esiste un alunno di quinta che è studioso o esiste un alunno di quinta che è ubbidiente*

Per il quantificatore universale:

per ogni x vale A o per ogni x vale B **implica logicamente che** *per ogni x vale A o B*

ma non vale in generale il viceversa

Quindi:
ogni persona è un maschio oppure una femmina **non implica logicamente che** *ogni persona è un maschio oppure ogni persona è una femmina*

I quantificatori nell'ambito del linguaggio della logica di predicati

Linguaggio artificiale per la logica:
espressione formale delle proprietà e delle relazioni

Consideriamo queste proposizioni:

a) "*Pietro corre*"

b)"*Carlo è più alto di Lucia*"

d)"*Carlo visita Milano con Antonio*"

in a) al soggetto Pietro *è attribuita la proprietà di correre* (o, estensionalmente, di essere incluso nella classe di coloro che corrono)

in b) agli individui Carlo e Lucia *è attribuito il predicato (o relazione) binario* "essere più alto di"

in c) ai tre termini individuali Carlo , Milano, Antonio *è attribuito il predicato(o relazione)ternario*
"visitare una località in compagnia di"

Introdiciamo nel linguaggio simbolico delle **lettere predicative** che corrispondano a queste relazioni

$C(.)$ (unaria o monadica)
$N(.,.)$ (binaria)
$V(.,.,.)$ (ternaria)

Linguaggio artificiale:logica dei predicati

Le proposizioni precedenti corrispondono a

C(Pietro) N(Carlo,Lucia) V(Carlo,Milano,Antonio)

L' **appartenenza di un individuo a una classe** o, parallelamente, **una proprietà di un individuo**, viene indicata da un predicato monadico

I termini a cui il predicato si applica sono detti **argomenti** del predicato

predicati applicati a termini individuali costitutiscono le **formule atomiche** del linguaggio

Siamo così in grado di rappresentare combinazioni booleane di proprità e relazioni:
se *Pietro corre* ***o*** *Carlo è più alto di Lucia* ***allora*** *Carlo visita Milano con Antonio* corrisponde a:

$[C(\text{Pietro}) \vee N(\text{Carlo,Lucia})] \rightarrow V(\text{Carlo,Milano,Antonio})$

i **nomi** Pietro, Carlo, Lucia hanno il ruolo di costanti individuali del linguaggio; se assumo che le lettere a,b,c,... siano **costanti individuali** disponibili nel linguaggio simbolico per denotare singoli individui posso scrivere

$$[C(\mathrm{a}) \vee N(\mathrm{d,e})] \rightarrow V(\mathrm{c,b,q})$$

è una formula del linguaggio della Logica dei Predicati **in cui non sono presenti variabili individuali**

Linguaggio artificiale Variabili individuali e quantificatori

"tutti gli ateniesi sono mortali" è esprimibile con:

$\forall x(A(x) \to M(x))$

"esiste almeno un corvo che non è nero"
è esprimibile con:

$\exists x(C(x) \land \neg\ N(x))$

dove *A, M,C,N* sono lettere predicative monadiche che si intende corrispondano alle proprietà dichiarate.
Notiamo che:
le formule ottenute *riflettono esattamente la struttura sintattica e logica* degli enunciati naturali di partenza, *ma sono indipendenti dal loro contenuto*, e, se cambiamo l' interpretazione dei predicati *A,M,C,N*, assumono significati diversi

Connettivi proposizionali, quantificatori, lettere predicative, variabili individuali,costanti individuali,
costituiscono il **Linguaggio della Logica dei Predicati (al 1°ordine),** introdotta da Frege(1879) e in parte anche da Peirce e da Peano negli stessi anni, e formulata definitivamente da Hilbert nel 1928. La logica proposizionale può pensarsi ottenuta da quella predicativa sopprimendo quantificatori e variabili e costanti individuali

Espressività della Logica dei Predicati

Un insieme rilevante di enunciati naturali può essere tradotto nel linguaggio della Logica dei Predicati (tenendo presente che le forme della traduzione non sono univoche, e che l' esattezza della traduzione non sempre è valutabile) :

se un docente insegna a studenti di logica allora deve essere coraggioso

$\forall x[(D(x) \wedge \exists y(S(y) \wedge L(x,y)) \rightarrow C(x)]$

$D(x)$ sta per "x è un docente"
$S(y)$ sta per "y è uno studente di logica"
$C(x)$ sta per "x è coraggioso"
$L(x,y)$ sta per "x insegna a y"

Spesso, per comodità, per lettere predicative si usano abbreviazioni che ricordano il senso di partenza, ad es *Doc*(x), *Studlog*(y) ecc**; l' essenziale è trattarle come meri simboli della sintassi**, che ammettono anche interpretazioni diverse arbitrarie:

Ad ogni minuto un uomo è derubato a New York

$\forall x\ [minuto(x) \rightarrow \exists y(uomo(y) \wedge derubatoNY(x,y))]$

Regole di inferenza proposizionale

Alcune regole corrette, connesse all' argomentazione comune, sono:

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \qquad \textit{(Modus Ponens)}$$

$$\frac{B \rightarrow C \quad \neg C}{\neg B} \qquad \textit{(Modus Tollens)}$$

$$\frac{B \rightarrow C \quad C \rightarrow D}{B \rightarrow D} \qquad \textit{(sillogismo ipotetico)}$$

$$\frac{A \vee B \quad \neg B}{A} \qquad \textit{(sillogismo disgiuntivo)}$$

$$\frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A}{A \vee B}$$

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}$$

Base di regole che consente di esprimere una rilevante classe di inferenze (*regole della deduzione naturale*)

Le regole di inferenza essenziali ammettono questa enunciazione didatticamente efficace:

1)*Introduzione della congiunzione*: se si sono dimostrate le proposizioni A e B allora si dimostra la congiunzione $A \wedge B$

2)*Eliminazione della congiunzione:* se si è dimostrata la congiunzione $A \wedge B$ allora si dimostrano sia A sia B

3) *Introduzione della disgiunzione:* se si è dimostrata A allora si dimostrano sia $A \vee B$ sia $B \vee A$

4) *Eliminazione della disgiunzione:* se si è dimostrata $A \vee B$ e da ciascuno dei disgiunti, assunti come ipotesi, segue la proposizione C, allora si dimostra C

5) *Introduzione del condizionale:* se da A, assunta come ipotesi, segue B, allora si dimostra $A \rightarrow B$

6) *Eliminazione del condizionale:* se si sono dimostrate A e $A \rightarrow B$ allora si dimostra B (è il *modus ponens*)

7)Ragionamento per assurdo: se assumendo B come ipotesi si è dimostrata $A \wedge \neg A$ allora si dimostra B

Regole di inferenza essenziali (II)

8) *Eliminazione del quantificatore universale*: se si è dimostrata $\forall x A(x)$, allora si è dimostrato $A(t)$ per ogni termine t

9)*Introduzione del quantificatore universale*: se si è dimostrata $A(x)$ senza usare alcuna ipotesi su x, allora si dimostra $\forall x A(x)$

10) *Introduzione del quantificatore esistenziale*: se si è dimostrata $A(t)$, allora si dimostra $\exists x A(x)$

11) *Eliminazione del quantificatore esistenziale*: se si è dimostrata $\exists x A(x)$, e si dimostra B da $A(x)$ senza usare alcuna ipotesi su x, allora si dimostra B

Diciamo regole di inferenza della logica classica (moderna) quelle sopra descritte

Siccome la relazione di uguaglianza compare frequentemente in ogni argomentazione, è necessario introdurre assiomi e regole che ne definiscono le proprietà:

Inferenze per il predicato (relazione) di uguaglianza:

$$\frac{x=y}{y=x} \qquad \frac{x=y \quad y=z}{x=z} \qquad \frac{x=y \quad A(x)}{A(y)}$$

Assioma: $x=x$

Semantica per il linguaggio della Logica dei Predicati

Semantica di Tarski :

Si associa ad ogni elemento del linguaggio il suo significato in una interpretazione, che è un universo di oggetti che esiste *indipendentemente dalla sintassi* del linguaggio.

∗ L' interpretazione è costituita da un insieme o **dominio D** e da una legge *g* che ad ogni costante individuale **a** associa un oggetto di D
e a ogni lettera predicativa A_i^n associa una relazione fra gli elementi di **D**;
(**D**,*g*) è anche detto **mondo possibile**

∗ le variabili individuali si suppongono variare sugli oggetti di **D**;

∗ La **verità** di un enunciato in una interpretazione (**D**,*g*) è così definita:

*Le formule atomiche del tipo *N*(**e**,**f**,...), *N* lettera predicativa, **e,f,...** costanti individuali, sono vere in (**D**,*g*) se e solo se gli oggetti di **D** denotati da **e,f...** stanno fra loro nella relazione fra elementi di **D** che interpreta *N*

Semantica per la Logica dei Predicati

*Se A,B sono enunciati composti qualsiasi allora la verità in una interpretazione (**D**,*g*) delle loro combinazioni booleane è così definita:

$A \wedge B$ è vera in (**D**,*g*) se e solo se lo sono A e B

$A \vee B$ è vera in (**D**,*g*) se e solo se una fra A e B lo è

$A \rightarrow B$ è vera in (**D**,*g*) se e solo se non succede mai che A sia falsa e B vera in (**D**,*g*)

$\neg A$ è vera in (**D**,*g*) se e solo se A è falsa in (**D**,*g*)

(le contraddizioni $A \wedge \neg A$ **risultano false in ogni (D,*g*)**)

* La verità di enunciati del tipo $\exists xA(x)$, $\forall xA(x)$, A(x) formula arbitraria in cui x compare non quantificata, è così definita:

$\forall xA(x)$ è vera in (**D**,*g*) se e solo se **ogni oggetto** di **D** soddisfa la relazione fra elementi di **D** descritta da A

$\exists x A(x)$ è vera in (**D**,*g*) se e solo se **esiste almeno un oggetto** di **D** che soddisfa la relazione fra elementi di **D** descritta da A

Semantica per la Logica dei Predicati

*Un enunciato del linguaggio della logica dei predicati è **valido** se è vero in **ogni** possibile interpretazione.

*Esempio: $\forall x \forall x\, (A(x,y) \rightarrow P(x,y))$
non è valida, infatti:

è falsa rispetto a questa interpretazione:

D insieme dei poligoni
interpretazione del predicato A(x,y): y ha la stessa area di x
interpretazione del predicato P(x,y): y ha lo stesso perimetro di x

è vera rispetto a questa interpretazione:

D insieme dei poligoni
interpretazione del predicato A(x,y): y è uguale a x
interpretazione del predicato P(x,y): y ha lo stesso perimetro di x

* $\mathbf{\exists x P(x) \leftrightarrow \neg \forall x \neg P(x)}$

$\mathbf{\forall x P(x) \leftrightarrow \neg \exists x \neg P(x)}$

sono valide